

文章编号: 1000-7598-(2006) 01-0132-05

加筋土坡临界高度的研究

乔丽平, 王 钊

(武汉大学 土木建筑工程学院, 武汉 430072)

摘 要: 假定破裂面为一过坡脚的斜平面, 分别以传统塑性理论和广义塑性理论为基础, 导出了加筋土坡临界高度的计算公式。通过与前人试验结果的比较发现, 虽然基于广义塑性理论极限法求得的加筋土坡临界高度值要比基于传统塑性理论极限法求得的临界高度值略偏大, 且更接近于试验实测值, 但二者在工程中均是可靠的, 都可用于加筋土坡设计时的参考。

关 键 词: 传统塑性理论; 广义塑性理论; 加筋土坡; 临界高度

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

Research of critical height of reinforced slopes

QIAO Li-ping, WANG Zhao

(School of Civil and Architectural Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: Assuming that the failure surface to be an inclined plane through the slope toe, and based on the classical plasticity theory and the generalized plasticity theory respectively, the computation formulas of the reinforced slope's critical height are deduced. Comparing to the previous experimental values of the reinforced slopes, although the critical height with the generalized plasticity theory limit analysis method is slightly higher than the critical height with the classical plasticity theory limit analysis method, and it is more close to the experimental values; both of them are reliable in the engineering; and they can be used as reference for reinforced slope design.

Key words: classical plasticity theory; generalized plasticity theory; reinforced slopes; critical height

1 引 言

对加筋土结构临界高度的研究一直是人们关注的一个问题, 在极限分析法方面, 吴雄志、史三元等 (1994 年)^[1] 给出了土工织物加筋土坡的稳定级数的上限解, 分析中假定破裂面为一过坡脚的斜平面, 且土工织物沿坡高等间距分布, 推导时认为当破裂面形成时, 机动可能的速度场的速度方向沿破裂面向下滑动。杨雪强 (1997 年)^[2] 考虑了加筋的强度效应和变形效应, 以过坡脚的平动破坏推导了竖直加筋边坡极限稳定高度的上限解, 推导时取加筋的横向间距的土坡长度作为计算单元, 其公式适用于采用筋带 (条) 加筋的土坡, 对于满铺式加筋 (如土工格栅、织物等) 土坡则较难应用。Radoslaw L.M. (1997 年, 1998 年)^[3, 4] 将极限分析法用于加筋土结构的稳定性计算中, 分析时以无粘性加筋土

坡为研究对象。以上的分析均是基于传统塑性理论极限分析法进行的, 即分析中认为速度滑移线与应力特征线成夹角 φ (文献[1]中认为速度滑移线与应力特征线平行), 从而导致在计算土体能耗时反映不出摩擦能耗, 与岩土材料实际情况不相符。近几年来, 在国内兴起的广义塑性理论认为速度滑移线与应力特征线成 $\varphi/2$ 夹角, 从而在能耗计算中可以明确的反映出土体的摩擦能耗, 符合岩土材料的实际情况^[5-7]。本文以这两种塑性理论为基础, 考虑平动破坏方式, 推导了均质加筋土坡临界高度的计算公式, 并作了比较。

2 传统塑性理论与广义塑性理论

2.1 传统塑性理论^[7, 8]

传统塑性理论认为: 刚体平动时位移速度与刚体平面成夹角 φ ; 转动破坏时对数螺旋面上的位移

收稿日期: 2004-07-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目成果 (No.50279036)

作者简介: 乔丽平, 男, 1979 年生, 硕士研究生, 从事加筋土挡墙与土坡方面的研究工作。E-mail: qiaofeng624@126.com

速度矢量与对数螺旋面的切线间夹角为常量 φ ，即有 $\dot{\varepsilon}_n^p/\dot{\gamma}^p = -\tan\varphi$ 。则纯剪情况下单位体积土体的能耗为：

$$\dot{w} = \tau\dot{\gamma}^p + \sigma_n\dot{\varepsilon}_n^p = (\sigma_n \tan\varphi + c)\dot{\gamma}^p - \dot{\gamma}^p \tan\varphi \sigma_n = c\dot{\gamma}^p \quad (1)$$

式中 $\dot{\gamma}^p$ 为剪应力 τ 对应的剪应变； $\dot{\varepsilon}_n^p$ 为正应力 σ_n 对应的正应变。

由式(1)可以看出处于极限状态下的土体能耗反映不出摩擦能耗，这与实际情况是不相符的。

2.2 广义塑性理论^[6,7,9]

广义塑性理论认为：刚体平动时位移速度与刚体平面成 $\varphi/2$ 夹角；转动破坏时对数螺旋面上的位移速度矢量与对数螺旋面的切线间夹角为常量 $\varphi/2$ ，即有 $\frac{\dot{\varepsilon}_n^p}{\dot{\gamma}^p} = -\tan\frac{\varphi}{2}$ 。则纯剪情况下单位体积土体能耗为：

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \tau\dot{\gamma}^p + \sigma_n\dot{\varepsilon}_n^p = (\sigma_n \tan\varphi + c)\dot{\gamma}^p - \dot{\gamma}^p \tan\frac{\varphi}{2} \sigma_n = \\ &c\dot{\gamma}^p + \sigma_n(\tan\varphi - \tan\frac{\varphi}{2})\dot{\gamma}^p \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)表明处于极限状态下的土体能耗由粘聚力能耗与摩擦力能耗两部分组成，符合岩土材料实际情况。

3 极限分析法

如果所假设的相容塑性变形机构 ε_{ij}^{p*} 和 v_i^{p*} 在 S_v 上满足边界条件 $v_i^{p*} = 0$ ，则根据外力做功的功率与内部能量损耗率相等所确定的荷载 T_i 和 F_i 必大于或等于实际破坏荷载（极限荷载）。也就是说，在任何运动许可的速度场中，将外力所作的功率等于内部能量损耗率而得到的荷载，是实际极限荷载的上限^[10]。即有：

$$\int_V F_i v_i^* dv + \int_S T_i v_i^* ds = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dv \quad (3)$$

式中 F_i 为体积力； T_i 为面力； v_i^* 为运动许可速度场； σ_{ij} 为静力许可应力场； ε_{ij}^* 为与 σ_{ij} 对应的应变。

4 加筋土坡临界高度

为简化计算，假定加筋土坡的破裂面为一过坡脚的斜平面。

4.1 基于传统塑性理论极限法的加筋土坡临界高度

(1) 外功率

如图1所示，破裂体ABC的重量为：

$$G = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta} \gamma H^2$$
；则外功率为：

$$\begin{aligned} W &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta} \gamma H^2 v \sin(\beta - \varphi) + \\ &\frac{\sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \varphi)}{\sin \alpha \sin \beta} p H v \end{aligned} \quad (4)$$

式中 γ 为填土容重(kN/m³)； H 为坡高(m)； α 为加筋土坡倾斜角； β 为破裂面与水平方向夹角； φ 为填土内摩擦角； v 为速度间断面上的速度间断量。

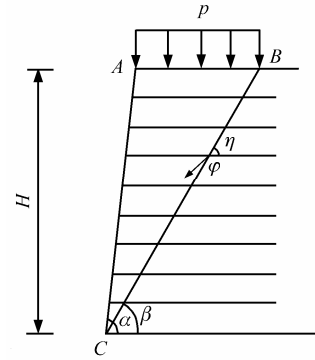


图1 传统塑性理论下的计算图

Fig.1 Computation schematic with classical plasticity theory

(2) 内能耗损率

内能耗损率包括土体的能量损耗率和筋材上的能量损耗率。

由式(1)得沿着整个破坏面的土体能耗为：

$$\begin{aligned} D_L &= \int_L dD = \int_L cv \cos \varphi dl = \\ &\int_0^H cv \cos \varphi \frac{dh}{\sin \beta} = \frac{cHv \cos \varphi}{\sin \beta} \end{aligned} \quad (5)$$

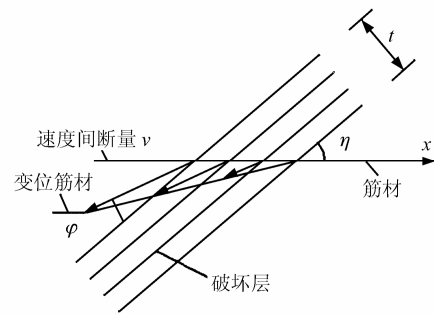


图2 传统塑性理论下的筋材破坏图

Fig.2 Failure schematic of reinforcement with classical plasticity theory

本文中，考虑所有的能量消耗沿着速度间断面发生。如图2，由筋材拉力破坏产生的单位面积速度间断面上的能量损耗率为^[4]：

$$dr = \int_0^{t \sin \eta} k_t \varepsilon_x \sin \eta dx = k_t v \cos(\eta - \varphi) \sin \eta$$

式中 ε_x 为筋材方向上的应变率; t 为筋材破裂层厚度; η 为筋材倾斜角; v 为速度间断面上的速度间断量; k_t 为单位截面上筋材拉伸强度, 对于均匀分布的筋材, k_t 可表达为:

$$k_t = \frac{T}{s} = \frac{T}{H/n} = \frac{nT}{H}$$

式中 T 为筋材拉伸强度 (kN/m); s 为筋材层间距 (m); n 为加筋层数。

筋材沿着整个破坏面的能量耗损率为:

$$D_r = \int_L dr = \int_L k_t v \cos(\eta - \varphi) \sin \eta dl$$

注意到 $\eta = \beta$, $dl = \frac{dh}{\sin \beta}$, 则

$$D_r = \int_0^H k_t v \cos(\beta - \varphi) \sin \beta \frac{dh}{\sin \beta} = k_t v H \cos(\beta - \varphi) \quad (6)$$

将式 (4) ~ (6) 代入式 (3) 并整理得:

$$H = \frac{2k_t \cos(\beta - \varphi) \sin \alpha \sin \beta + 2c \cos \varphi \sin \alpha}{\gamma \sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \varphi)} - \frac{2p}{\gamma} \quad (7)$$

当 $k_t = 0$, $\alpha = 90^\circ$, $p = 0$ 时, $H = \frac{2c \cos \varphi}{\gamma \cos \beta \sin(\beta - \varphi)}$,

即为无外荷载下无筋竖直边坡的临界高度计算式, 与文献[11]给出的计算式一致。

式 (7) 给出了临界高度的一个上限, 当 β 满足:

足: $\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0$ 时, 即:

$$k_t [\cos(2\beta - \varphi) \sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \varphi) - \cos(\beta - \varphi) \cdot \sin \beta \sin(\alpha + \varphi - 2\beta)] - c \cos \varphi \sin(\alpha + \varphi - 2\beta) = 0 \quad (8)$$

得到最小的 H 。 β 一般大于 $(\alpha + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4})$ 而小于 α ,

用迭代法求出 β , 代入式 (7) 就可得到加筋土坡临界高度 H_{cr} 的最小值。

4.2 基于广义塑性理论的计算

(1) 外功率

如图 3, 外功率为:

$$W = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta} \gamma H^2 v \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) + \frac{\sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \frac{\varphi}{2})}{2 \sin \alpha \sin \beta} p H v \quad (9)$$

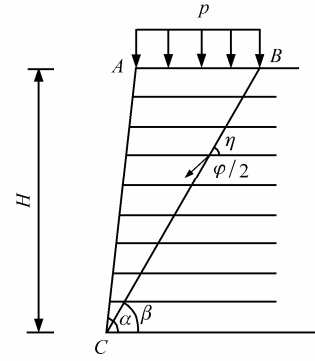


图 3 广义塑性理论下的计算图
Fig.3 Computation schematic with generalized plasticity theory

(2) 内能耗损率

内能耗损率包括土体的能量损耗率和筋材上的能量损耗率。

土体滑移破坏面上每点的应力状态为 $\sigma_v = \gamma h + p$, $\sigma_h = 0$, 由此可得破坏面上每点的正应力为 $\sigma_n = (\gamma h + p) \cos^2 \beta$ 。由式 (2) 得土体沿破坏面的能量损耗率为:

$$D_L = \int_L dD = \frac{c H v \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \beta} + \int_0^H (\gamma h + p) \cos^2 \beta \cdot$$

$$(\tan \varphi - \tan \frac{\varphi}{2}) v \cos \frac{\varphi}{2} \frac{dh}{\sin \beta} = \frac{c H v \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \beta} + (\frac{1}{2} \gamma H^2 v + p H v) (\tan \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}) \frac{\cos^2 \beta}{\sin \beta} \quad (10)$$

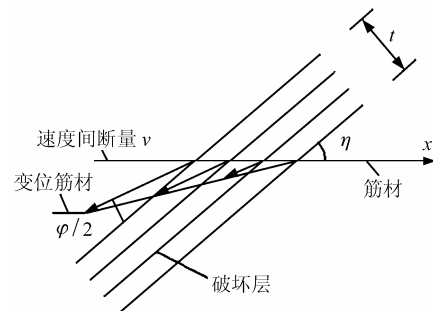


图 4 广义塑性理论下的筋材破坏图
Fig.4 Failure schematic of reinforcement with generalized plasticity theory

如图 4, 由筋材拉力破坏产生的单位面积速度间断面上的能量损耗率为:

$$dr = \int_0^{t \sin \xi} k_t \varepsilon_x \sin \xi dx = k_t v \cos(\xi - \frac{\varphi}{2}) \sin \xi$$

式中有关符号的定义同前。

筋材沿着整个破坏面的能量耗损率为:

$$D_r = \int_L dr = \int_L k_t v \cos(\xi - \frac{\varphi}{2}) \sin \xi dl =$$

$$\int_0^H k_t v \cos(\beta - \frac{\varphi}{2}) \sin \beta \frac{dh}{\sin \beta} = k_t v H \cos(\beta - \frac{\varphi}{2})$$
(11)

将式(9)~(11)代入式(3)并令:

$$A = 2k_t \cos(\beta - \frac{\varphi}{2}) \sin \alpha \sin \beta, \quad B = 2c \cos \frac{\varphi}{2} \sin \alpha,$$

$$C = \sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}),$$

$$D = (\tan \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}) \sin \alpha \cos^2 \beta$$

故
$$H = \frac{A+B}{\gamma(C-D)} - \frac{2p}{\gamma}$$
 (12)

式(12)给出了临界高度的一个上限, 当 β 满足:

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0 \text{ 时, 即:}$$

$$k_t \sin \alpha \cos(2\beta - \frac{\varphi}{2}) \left[\sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) - \right.$$

$$\left. (\tan \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}) \sin \alpha \cos^2 \beta \right] - \left[k_t \cos(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot \right.$$

$$\sin \alpha \sin \beta + c \cos \frac{\varphi}{2} \sin \alpha \left[\sin(\alpha + \frac{\varphi}{2} - 2\beta) + \right.$$

$$\left. (\tan \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}) \sin \alpha \sin 2\beta \right] = 0$$
(13)

得到最小的 H 。同样用迭代法求出 β , 代入式(12)就可得到加筋土坡临界高度 H_{cr} 的最小值。

5 算 例

文献[12-14]给出了加筋土坡离心试验的结果, 填土容重 $\gamma = 17.8 \text{ kN/m}^3$, 其有关参数及试验结果见表 1。表中 H_{cr1} 和 H_{cr2} 分别为由式(7), (8)和式(12), (13)计算得到的加筋土坡临界高度, H_{cr3} 为由文献[1]中方法计算得到的临界高度。

由表 1 可见: (1) 文献[1]中方法求得的临界高度比试验值大, 大约 20%~30%; (2) 基于广义塑性理论极限法求得的加筋土坡临界高度要比基于传统塑性理论极限法求得的临界高度大, 且更接近离心试验实测值。其中一个最主要的原因就是基于广义塑性理论极限法体现了土体摩擦能耗, 符合实际情况; (3) 基于广义塑性理论极限法求得的临界高度值比试验实测值略偏低(一般不超过 11%), 在工程中是完全可以接受的。分析其偏低的原因, 可能有如下几个方面: 理论计算中只考虑了筋材的拉力破坏, 而筋材拉力破坏的发生到模型土坡的完全破坏还有一个渐进的过程, 理论计算中忽略了这一渐进过程的能量损耗; 计算中 T 采用的由筋材的宽条试验得到的拉伸强度, 其作用并未完全发挥出来。有关 T 的取值, 有待进一步研究; 离心试验中, 箱壁不可能绝对光滑, 箱壁与模型间的摩擦力使得试验结果本身就有一定误差。(4) 基于传统塑性理论极限法求得的临界高度与基于广义塑性理论极限法求得的临界高度值相差不大, 说明传统塑性理论极限法尽管在理论上不完善, 但求得的临界高度值还是可靠的。而且由于这种方法不必计算摩擦能耗, 从而使计算简化, 所以它是一种理论上不完善的但又十分实用的方法。

表 1 离心模型试验及理论计算的临界高度
Table 1 Centrifuge modeling test and critical height with theoretical computation

序 号	$\alpha / (^{\circ})$	c / kPa	$\phi / (^{\circ})$	$k_t / \text{kN} \cdot \text{m}^2$	H^* / m	H_{cr1} / m	H_{cr2} / m	H_{cr3} / m
M-11	90	24.7	19.3	2.816	9.2	8.45	8.52	12.0
M-28	90	20.2	20.8	2.777	8.2	7.24	7.32	10.3
M-32	80.5	23.8	20.6	2.776	11.4	10.70	11.27	13.4
M-35	80.5	22.7	21.3	2.790	11.1	10.46	10.99	13.2
M-49	90	17.8	21.5	2.796	7.4	6.55	6.60	9.2

注: 表中 H^* 为加筋土坡模型离心试验得到的临界高度值; H_{cr1} 和 H_{cr2} 分别为由基于传统塑性理论极限法和广义塑性理论极限法求得的理论值; H_{cr3} 为由文献[1]方法计算得到的临界高度值。

6 结 语

极限分析法考虑了土体和筋材的塑性及其应力-应变关系, 与实际情况较符合, 且分析中不需要

太多的假设, 使求解变得简单; 传统极限法在计算中体现不出摩擦能耗, 这点与实际不符, 而广义塑性理论极限法正好弥补了这点, 尽管使计算稍微复杂, 但在理论上更加完善; 本文得到的临界

高度值是加筋土坡极限稳定高度的理论解, 具体工程中不能直接按该值进行设计, 应选取适当的安全系数, 使之更符合实际情况。有关安全系数的取值, 可进一步研究; 本文基于两种塑性理论极限分析法导出的加筋土坡临界高度计算公式, 计算结果相差不大, 均可作为加筋土坡设计时的参考。

参考文献

- [1] 吴雄志, 史三元, 杜海金, 等. 土工织物加筋土坡稳定的塑性极限分析法[J]. 岩土力学, 1994, 15(2): 55—61.
WU Xiong-zhi, SHI San-yuan, DU Hai-jin, et al. Limit analysis for the stability of slopes reinforced with geotextile[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 1994, 15(2): 55—61.
- [2] 杨雪强. 对竖直加筋边坡设计方法的探讨[J]. 武汉水利电力大学学报, 1997, 30(2): 33—36.
YANG Xue-qiang. Research about designing method of vertical reinforced slopes[J]. **Journal of Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering**, 1997, 30(2): 33—36.
- [3] Radoslaw L.M. Stability of uniformly reinforced slopes[J]. **J. of Geotech. & Geoenviron. Eng.**, 1997, 123(6): 546—556.
- [4] Radoslaw L.M. Limit analysis in stability calculations of reinforced soil structure[J]. **Geotextiles and Geomembranes**, 1998, 16(6): 311—331.
- [5] 王敬林, 林丽, 等. 关于岩土材料极限分析上界法的讨论[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(增 1): 886—889.
WANG Jing-lin, LIN Li, et al. Discussion on the upper-bound method of limit analysis of geotechnical material[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2001, 20(Supp.1): 886—889.
- [6] 郑颖人. 岩土塑性力学的新进展-广义塑性力学[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(1): 1—10.
ZHENG Ying-ren. New development of geotechnical plastic mechanics-generalized plastic mechanics[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2003, 25(1): 1—10.
- [7] 王敬林, 郑颖人, 陈瑜瑶, 等. 岩土材料极限分析上界法的讨论[J]. 岩土力学, 2003, 24(4): 538—544.
WANG Jing-lin, ZHENG Ying-ren, CHEN Yu-yao, et al. Discussion on upper-bound method of limit analysis for geotechnical material[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2003, 24(4): 538—544.
- [8] 陈惠发. 极限分析与土体塑性[M]. 人民交通出版社, 1995.
- [9] 郑颖人. 关于岩土材料滑移线理论中速度解的讨论-广义塑性理论的应用[J]. 水利学报, 2001, (6): 1—7.
ZHENG Ying-ren. Discussion on velocity solution of slip line theory for geotechnical materials—the application of generalized plastic theory[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2001, (6): 1—7.
- [10] 吴梦军. 极限分析上限法在公路边坡稳定分析中的应用[J]. 重庆交通学院学报, 2002, 21(3): 52—55.
WU Meng-jun. The application of upper bound limit analysis to highway slope stability[J]. **Journal of Chongqing Jiaotong University**, 2002, 21(3): 52—55.
- [11] 龚晓南. 土塑性力学(第二版) [M]. 浙江大学出版社, 1999.
- [12] Porbaha A, Goodings K J. Centrifuge modeling of geotextiles reinforced cohesive soil retaining walls[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1996, 122(10): 840—848.
- [13] Porbaha A, Goodings K J. Centrifuge modeling of geotextiles-reinforced steep clay slopes[J]. **Can. Geotech. J.**, 1996, 33(5): 696—704.
- [14] Porbaha A. Traces of slip surfaces in reinforced retaining structures[J]. **Soils and Foundations**. 1998, 38(1): 89—95.